Шәкір Айдос

Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы, Қазақстан

e-mail: ajdossakir@gmail.com

4-дәріс. Функция ұғымы. Функцияның мәні және шегі

Дәрістің мақсаты – интегро-дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін қойылған кері есептің шешімінің жалғыздығын көрсету

Негізгі сұрақтар:

1. Функция. Күрделі функция. Функция берілуі
2. Функцияның анықталу және мәндер облыстары
3. Функция шегі нүктеде үзіліссіздігі. Коши мен Гейне бойынша үзіліссіздік

Функция ұғымы

Математикалық анализдің негізгі ұғымдарының бірі — функция ұғымы. Біз нақты бір аргументтен тәуелді нақты функцияны қарастырамыз. X және Y сан жиындары болсын.

Анықтама 0.1. Егер әрбір $x \in X$ айнымалысына белгілі бір ереже бойынша $y \in Y$ саны сәйкестендірілсе, онда X жиынында

$$y = y(x) \quad \text{немесе} \quad y = f(x)$$

функциясы берілген деп айтылады. Мұндағы x — тәуелсіз айнымалы немесе *аргумент*, y — тәуелді айнымалы, X жиыны функцияның *анықталу облысы*, ал Y жиыны функцияның *мәндер жиыны* деп аталады.

Функцияны белгілеу кезінде басқа да белгілер қолданылады, мысалы:

$$y = g(x), \quad y = \varphi(x), \quad y = F(x), \dots$$

$x_0 \in X$ болса, онда

$$y_0 = f(x_0)$$

санын функцияның *дербес мәні* деп атайды.

Егер функцияның барлық мәндері өзара тең болса, онда оны *тұрақты функция* деп атайды.

$f(x)$ функциясы X жиынында *жоғары* немесе *төменгі жағынан шектелген* деп аталады, егер тұрақты сандар M және m табылып, кез келген $x \in X$ үшін

$$f(x) \leq M \quad (\text{немесе} \quad f(x) \geq m)$$

теңсіздігі орындалса.

Егер функция жоғарғы және төменгі жағынан шектелген болса, оны *шектелген функция* деп атайды. Басқа жолмен:

$$\exists K > 0: \quad |f(x)| \leq K, \quad \forall x \in X.$$

Функцияның *графигі* деп жазықтықтағы $(x, f(x))$, $x \in X$ нүктелер жиынын атайды.

Функцияның берілу тәсілдері

Аналитикалық тәсіл. Аргумент пен тәуелді айнымалы арасындағы байланыс формула арқылы беріледі.

Мысалдар.

1. $y = x^2$, анықталу облысы $(-\infty, +\infty)$, мәндер жиыны $[0, +\infty)$.

2. $y = \sqrt{1 - x^2}$, анықталу облысы $[-1, 1]$, мәндер жиыны $[0, 1]$.

Қосымша функциялар мысалдары

3. $y = n!$ Бұл функция натурал сандар жиынында берілген, мәндер жиыны: $1!, 2!, \ldots, n!$.

4. Функция *signum* немесе

$$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} +1, & \text{егер } x > 0, \\ 0, & \text{егер } x = 0, \\ -1, & \text{егер } x < 0. \end{cases}$$

(sgn белгісі латынның *signum* — "таңба"деген сөзінен алынған). Функция $(-\infty, +\infty)$ анықталған, мәндер жиыны: $-1, 0, +1$.

5. Дирихле функциясы:

$$y = f(x) = \begin{cases} 1, & \text{егер } x \text{ рационал сан болса,} \\ 0, & \text{егер } x \text{ иррационал сан болса.} \end{cases}$$

Бұл функция $(-\infty, +\infty)$ анықталған, мәндер жиыны: 0 және 1.

Кестелік тәсіл

Бұл тәсілде аргумент пен тәуелді айнымалы арасындағы байланыс кесте арқылы беріледі. Мысалы:

x	x_1	x_2	$\ldots$	x_n
y	y_1	y_2	$\ldots$	y_n

Анықталу облысы — x_i мәндері, мәндер жиыны — y_i. Кесте тек аргументтің шекті мәндерінде беріледі. Мысалы, тригонометриялық немесе логарифмдік функциялардың кестелері.

Графикалық тәсіл

Физикалық өлшеулерде жиі кездеседі. Айнымалы x пен y арасындағы байланыстың графигі беріледі.

Функциялардың композициясы

f және φ функциялары сәйкесінше X және Y жиындарында анықталып, φ функциясының мәндер жиыны f функциясының анықталу облысында жатсын, онда кез келген x мәніне белгілі бір ереже бойынша $F = f(y)$ функциясының бір мәні сәйкес келіп,

$$F = f[\varphi(x)]$$

функциясы анықталады. Осы $F = f[\varphi(x)]$ функциясын f және φ функцияларының *композициясы* немесе *күрделі функция* деп атайды. Мұндағы x — тәуелсіз айнымалы, y — аралық аргумент.

Қайсыбір f және φ функцияларының композициясын

$$(f \circ \varphi)(x) = f(\varphi(x)) \quad \text{немесе} \quad \varphi \circ f$$

түрінде жазады.

Айта кететін жағдай: күрделі функция айнымалылардың тәуелділігін емес, олардың берілу тәсілдерін сипаттайды.

Функцияның айқындалмаған түрде берілуі

$$F(x, y) = 0$$

теңдеуі y айнымалысын x-тен тәуелді функция ретінде анықтайды. Бұл $y(x)$ айнымалысы берілген x-пен бірге $F(x, y(x)) = 0$ теңдеуін қанағаттандырады, демек, x белгілі мәнінде $F(x, y) = 0$ теңдеуінің шешімі болады. Мұндай $y(x)$ функциясының берілуін *айқындалмаған түрде берілу* деп атайды.

Функция шегі. Біржақты шектер

Айталық, $f(x)$ функциясы X сан жиынында анықталсын.

Анықтама 0.2 (Шектік нүкте)**.** Егер x_0 нүктесінің кез келген аймағында X жиынының x_0 өзгеше x нүктесі жатса, x_0 нүктесін X жиының *шектік нүктесі* деп атайды. Шектік нүкте X жинында жатуы да, жатпауы да мүмкін.

X жиынынан x_0-ке жинақты

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots \quad (x_n \neq x_0) \tag{1}$$

тізбегін аламыз, сәйкес функция мәндері

$$f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n), \ldots \tag{2}$$

сан тізбегін құрады.

Анықтама 0.3 (Гейне бойынша шек)**.** x_0 нүктесіне жинақты (1) тізбек бойынша құрылған (2) тізбек b санына жинақты болса, онда b санын $f(x)$ функциясының $x = x_0$ нүктесіндегі немесе $x \to x_0$ шегі деп атайды. Оны былай жазады:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = b \quad \text{немесе} \quad x \to x_0 \Rightarrow f(x) \to b.$$

$f(x)$ функциясының x_0 нүктесінде жалғыз шегі бар, бұл $\{f(x_n)\}$ жинақты тізбектің жалғыз шегі болатынан шығады.

Анықтама 0.4 (Коши бойынша шек)**.** Егер кез келген $\varepsilon > 0$ саны үшін $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ саны табылып, кез келген $x \in X, x \neq x_0$ мәндерінде

$$|x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - b| < \varepsilon \tag{3}$$

теңсіздігі орындалса, b санын $f(x)$ функциясының $x = x_0$ нүктесіндегі шегі деп атайды. Бұл анықтаманы функция шегінің "ε-δ" тіліндегі анықтамасы деп атайды.

Теорема 0.1. Функция шегінің бірінші және екінші анықтамасы эквивалентті.

Мысалдар

1. $f(x) = C$, $(C = const)$ тұрақты функцияның сан өсінің әрбір x_0 нүктесінде шегі бар. Шынында, егер (1) кез келген x_0 нүктесіне жинақты тізбек болса, онда (2) тізбек $C, C, \ldots, C, \ldots$ түрде жазылады. Демек, $x = x_0$ болса, $f(x_0) = C$, онда

$$n \to \infty \Rightarrow f(x_n) \to C \quad \text{немесе} \quad \lim_{x \to x_0} f(x) = C.$$

   Сонымен, тұрақты функцияның шегі осы санның өзіне тең.

2. $f(x) = x$ функциясының сан түзудің кез келген x_0 нүктесінде шегі бар және ол x_0 тең. Бұл жағдайда (1) және (2) тізбек тепе-тең болады. Демек,

$$\text{егер } x_n \to x_0, \text{ онда } f(x_0) = x_0, \text{ олай болса, } f(x_n) \to x_0,$$

   немесе

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} x = f(x_0) = x_0.$$

3. Дирихле функциясы

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{егер } x \text{ рационал сан болса,} \\ 0, & \text{егер } x \text{ иррационал сан болса.} \end{cases}$$

   Дирихле функциясының сан өсінің бірде-бір нүктесінде шегі жоқ. Шынында, x_0 нүктесіне жинақты рационал сан тізбектеріне сәйкес келетін функция тізбегінің мәндері бірдей, ал x_0 нүктесіне жинақты иррационал сан тізбектерінің шегі нөлге тең болады.

Гейне анықтамасы тізбек шегінің ұғымына негізделген, сондықтан бұл анықтаманы “тізбек тіліндегі” анықтама деп атайды.

Шексіз аз, шексіз үлкен функциялар және оларды салыстыру

Анықтама 0.5 (Шексіз аз функция)**.** $y = \alpha(x)$ функциясын $x = x_0$ нүктесінде немесе $x \to x_0$ *шексіз аз* деп атайды, егер

$$\lim_{x \to x_0} \alpha(x) = 0.$$

Егер $y = f(x)$ функциясының x_0 нүктесіндегі шегі бар және $\lim_{x \to x_0} f(x) = b$, онда

$$\alpha(x) = f(x) - b$$

функциясы x_0 нүктесінде шексіз аз. Шынында,

$$\lim_{x \to x_0} \alpha(x) = \lim_{x \to x_0} [f(x) - b] = \lim_{x \to x_0} f(x) - \lim_{x \to x_0} b = b - b = 0.$$

Егер b саны $f(x)$ функциясының шегі болса, онда функция тұрақты b саны мен шексіз аз функцияның қосындысы түрінде өрнектеледі:

$$f(x) = b + \alpha(x), \quad \text{мұндағы} \lim_{x \to x_0} \alpha(x) = 0.$$

Теорема 0.2. Саны шекті (ақырлы) шексіз аз функциялардың алгебралық қосындысы, көбейтіндісі және шексіз аз функцияның шектелген функциямен көбейтіндісі шексіз аз функция.

Шексіз аз функцияларды салыстыру

$\alpha(x), \beta(x)$ функциялары x_0 нүктесінде шексіз аз болсын.

1. Егер
$$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0,$$
онда $\alpha(x)$ функциясын x_0 нүктесінде $\beta(x)$ қарағанда *жоғары ретті шексіз аз* деп атайды да, оны
$$\alpha \Rightarrow \beta$$
белгілейді.

2. Егер
$$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = A, \quad (A \neq 0),$$
онда $\alpha(x)$ пен $\beta(x)$ функцияларын x_0 нүктесінде бірдей ретті шексіз аздар деп атайды.

3. Егер
$$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1,$$
онда $\alpha(x)$ пен $\beta(x)$ функцияларын x_0 нүктесінде *эквиваленттi шексiз аздар* деп атайды, оны
$$\alpha(x) \sim \beta(x)$$
деп жазады.

4. Егер
$$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta^k(x)} = C, \quad (C \neq 0),$$
онда x_0 нүктесінде шексіз аз $\alpha(x)$ функциясын шексіз аз $\beta(x)$ салыстырғанда аздығы k ретті деп атайды.

Ескерту. Егер $x \to \infty$, $x \to +\infty$, $x \to -\infty$ болғанда шексіз аз функцияның ұғымы мен салыстырулары жоғарыдағыдай жүргізіледі.

Мысалдар

1. $\sin x$ және x функциялары $x \to 0$ ұмтылғанда эквивалентті шексіз аз функциялар, себебі

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

2. $\sin 3x$ және $\sin 5x$ функциялары $x \to 0$ реті бірдей шексіз аз функциялар.

1 Қосымша ақпарат

Студент толық ақпаратты [1], [2], [3], [4], [5], [6], [7] жұмыстардан қарауға болады.

Список литературы

[1] Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа. – М., 1968, 1972, 1956, 1960, 1964, 1957, 2002. 1

[2] Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. – М., 1997, 1990, 1977, 1962, 1998, 1969, 1966, 1958, 1956, 1952, 2002, 2004, 2006, 2005. 1

[3] Теміргалиев Н. Математикалық анализ. – Алматы, 1991. 1

[4] Кудрявцев Л.Д. Сборник задач по математическому анализу. – М., 1984, 1981, 1988, 2003. 1

[5] Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа. Ч. 1. – М.: Наука, 1982, 1987, 1985, 2004, 2006 1

[6] Сатығулова С., Искакова А.Қ., Айтжанов С.Е. Математикалық анализ I. – Алматы: Қазақ университеті, 2020. -236 б. 1

[7] Бурбаки Н. Основные структуры анализа. Книга 1. Теория множеств. – Москва: Мир, 1965. -455 б. 1